ORBIFOLDES, VARIÉTÉS SPÉCIALES ET CLASSIFICATION DES VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES COMPACTES

F.Campana

Le présent texte est une introduction à [C01], où l'on trouvera les détails techniques. On suppose le lecteur familier avec les notions de base de la gémétrie complexe (applications méromorphes, formes différentielles holomorphes, fibrés en droites amples, courbes projectives complexes).

0. INTRODUCTION.

Notations: On notera X une variété complexe compacte et connexe Kählérienne de dimension complexe $n, K_X := det(\Omega_X^1)$ son fibré canonique, dont les sections locales sont les formes volumes holomorphes.

Une **fibration** sera une application méromorphe surjective à fibres connexes $f: X \to Y$, avec Y un espace analytique complexe normal de dimension $p \le n$. On notera X_y sa fibre "générale" (ie: au-dessus de $y \in Y$, dans une intersection dénombrable d'ouverts de Zariski denses. Les fibres de f sont les images de celles obtenues après résolution des indéterminations). Deux fibrations sont équivalentes si elles ont la même famille de fibres, après identification biméromorphe des variétés X, X' sur lesquelles elles sont définies.

PROBLÈME: "Classifier" X, à équivalence biméromorphe près.

Trois géométries "pures" ("sphérique", "plate" et "hyperbolique") se dégagent naturellement, définies par le "signe" (négatif, nul, ou positif) de K_X , ou de manière équivalente, par le signe de la courbure de Ricci de X, avec un signe opposé.

Dans le cas bien connu des courbes (n = 1), ces trois géométries sont déterminées par un invariant topologique: le genre q(X) > 0. On a la trichotomie suivante:

géométrie "sphérique" si $K_X < 0$, ie: ssi Ricci(X) > 0, ssi g(X) = 0, ssi $X \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

géométrie (Ricci-)"plate" si $K_X=0$, ie: ssi Ricci(X)=0, ssi g(X)=1, ssi $X\cong \mathbb{C}/\Lambda,\Lambda$ un réseau de \mathbb{C} , ssi X est une courbe elliptique.

géométrie "hyperbolique" si $K_X > 0$, ie: ssi Ricci(X) < 0, ssi $g(X) \ge 2$, ssi $X \cong \mathbb{D}/\Gamma, \Gamma$ un réseau cocompact de SU(1,1), et \mathbb{D} le disque unité de \mathbb{C} .

Ces trois géométries sont distinguées aussi par d'autres invariants usuels (groupe fondamental, pseudométrique de Kobayashi, répartition des points K-rationnels,...). Les deux premières géométries ont des comportements qualitativement voisins, antithétiques de celui de la troisième. Par exemple, la pseudométrique de Kobayashi est nulle pour les géométries plate et sphérique, mais une métrique dans le cas hyperbolique; de manière analogue, si X est définie sur un corps de nombres K assez grand, l'ensemble X(K) de ses points K-rationnels est dense dans les cas plat et sphérique, mais est fini dans le cas hyperbolique, par le théorème de Faltings, conjecturé par Mordell.

On donnera ci-dessous (§2.C) des généralisations biméromorphes naturelles de ces géométries en toute dimension. Le problème de classification comporte donc une première étape:

la classification (et l'étude) des variétés X de géométrie "pure". Cette étape ne sera pas abordée ici. L'étude des gémétries pures ne suffit pas à résoudre le problème de classification posé.

En effet, dès que $n \geq 2$, les produits de courbes montrent que le signe de K_X n'est pas défini en général, et peut être mixte, présentant des directions négatives, nulles ou positives en chaque point.

OBJECTIF: Décomposer X, compacte Kähler arbitraire, en ses "composantes" sphérique, plate et hyperbolique, de manière à réduire (dans une large mesure) la compréhension globale de la structure des X arbitraires à celle des X de géométrie pure. Une telle décomposition ne peut prendre la forme simple de produits. En général, on devra se contenter de fibrations dans lesquelles base et fibres ont une géométrie pure donnée. Plus précisément, on va:

- 1. Définir ($\S 6.A$) une géométrie "spéciale" par l'absence sur X de fibration à base hyperbolique au sens "orbifolde". Les variétés plates et sphériques sont spéciales. L'introduction d'une structure orbifolde sur la base d'une fibration est en fait l'ingrédient nouveau, nécessaire, mais suffisant, pour bâtir une théorie cohérente de la décomposition des variétés X. La classification doit donc être étendue à la catégorie des orbifoldes, à laquelle la plupart des techniques existantes s'étendent sans difficulté.
- **2.** Construire (au (§7.A)), pour toute X, une fibration, fonctorielle en X, $c_X : X \to C(X)$ (le **coeur** de X), caractérisée par le fait que:
 - a. ses fibres générales sont spéciales.
 - b. sa base orbifolde est hyperbolique.

Cette fibration décompose donc X en ses composantes spéciale (les fibres de c_X) et hyperbolique (la base orbifolde de c_X). Et X est spéciale ssi C(X) est réduit à un point.

3. Décomposer ensuite (au (§7.B)) c_X fonctoriellement comme une tour de fibrations élémentaires de deux types: r (resp. J), dont les fibres sont sphériques (resp. plates) dans un sens orbifolde adéquat. Le résultat final prend la forme: $c_X = (J \circ r)^n$.

Lorsque X est spéciale, cette décomposition du coeur exprime donc X comme tour de fibrations à fibres orbifoldes alternativement sphériques et plates. La géométrie spéciale apparait ainsi comme la combinaison orbifolde des deux premières géométries, sphérique et plate, de la trichotomie.

4. Donner (§8), pour X compacte Kähler, à l'aide du "coeur" une décomposition qualitative conjecturale très simple de la pseudométrique de Kobayashi d_X de X, et de l'ensemble X(K) des points K-rationnels de X (si X est projective, définie sur un corps de nombres K assez grand). Ces conjectures étendent celles de S.Lang, qui traitent du cas particulier où X est "hyperbolique".

A titre d'exemple, on conjecture que X est spéciale si et seulement si $d_X \equiv 0$, si et seulement si X(K) est dense dans X (pour X comme ci-dessus, et K assez grand). Ces assertions présentent ainsi la géométrie spéciale comme la combinaison des géométries sphérique et plate également des points de vue arithmétique et Kobayashi pseudométrique.

La trichotomie initiale de la géométrie complexe se réduit ainsi à une dichotomie spéciale-hyperbolique de nature plus fondamentale, semble-t-il.

1. DIMENSION CANONIQUE (OU: "DE KODAIRA")

A. Dimension de Kodaira-Iitaka d'un fibré en droites.

Soit X une variété projective complexe de dimension n, et L un fibré holomorphe en droites complexes sur X (par exemple: $L = K_X$, si X est lisse). On va définir une notion de "positivité géométrique" pour L à l'aide du comportement asymptotique de $h^0(X, mL) := dim_{\mathbb{C}}(H^0(X, mL))$ quand m > 0 tend vers $+\infty$. (On utilise la notation additive $mL := L^{\otimes m}$). L'idée est que les $h^0(X, mL)$ croissent (à (X, L) fixé) comme un polynôme dont le degré est la dimension de la base d'une fibration dont les fibres sont les sous-variétés maximales de X le long desquelles L est "plat".

1.1. Exemples:

- 1. si $L = \mathcal{O}_X$ (le fibré trivial), on a: $h^0(X, mL) = 1, \forall m > 0$.
- 2. Si L est ample (ie: admet une métrique hermitienne de courbure positive), alors:

- $h^p(X, mL) = 0, \forall p > 0, \forall m > m_0$ (annulation de Kodaira).
- Donc: $h^0(X, mL) = \chi(X, mL) \sim C(X, L) \cdot m^n$, quand $m \to +\infty$, où $C(X, L) = L^n/n! > 0$.
- **3.** Par contre, si -L est effectif, c'est-à-dire si L a une section méromorphe non-nulle s ayant des pôles, mais pas de zéro, alors $h^0(X, mL) = 0$ pour tout m > 0 (car $(m m)L = \mathcal{O}_X$ aurait alors une section non nulle ayant des zéros d'ordre m là où s a des pôles).
- **4.** On peut enfin remarquer que si $f: X \to Y$ est une fibration holomorphe, avec $p := dim_{\mathbb{C}}(Y)$, et si M est un fibré en droites holomorphe sur Y, alors: $h^0(X, mf^*(M)) = h^0(Y, mM), \forall m > 0$.
 - Si M est ample sur Y, on a donc: $h^0(X, mf^*(M)) \sim C(Y, M)m^p$, quand $m \to +\infty$.
 - **5.** Si $h^0(X, mL) \sim A.m^p$, quand $m \to +\infty$, on a aussi: $Log(h^0(X, mL)) \sim p.Log(m)$, d'où la:
- 1.2. Définition: Soit X un espace analytique complexe compact irréductible, et L un fibré en droites holomorphe sur X. On pose: $\kappa(X,L) := lim sup_{m\to +\infty}(Log(h^0(X,mL))/Log(m))$. On appelle cet invariant la dimension de Kodaira-Iitaka de L
- **1.3. Exemples:** Si (X, L) est comme dans les exemples **1,2,3,4,5** précédents, $\kappa(X, L)$ vaut donc respectivement: $0, n, -\infty, p$.

Plus généralement, on montre les résultats suivants (voir [U]):

1.4. Proposition:

- 1. $\forall m > 0 : \kappa(X, L) = \kappa(X, mL) \in \{-\infty, 0, 1, ..., n\}.$
- **2.** $\kappa(X, L) = -\infty \text{ ssi } h^0(X, mL) = 0, \forall m > 0.$
- **3.** $\kappa(X,L) = d \ge 0$ ssi $Bm^d \ge h^0(X,mL) \ge Am^d, \forall m > m_0$, pour deux constantes B > A > 0, quitte à remplacer L par un multiple m_1L adéquat.
- **4.** Si $\kappa(X, L) = d \ge 0$, il existe une (à équivalence biméromorphe près unique) fibration $\Phi_L : X \to V_L$ telle que $dim(V_L) = d$, et $\kappa(X_v, L_v) = 0$, si X_v est la fibre générale de Φ_L , et L_v la restriction de L à X_v . Cette fibration est la **fibration d'Iitaka** associée à L.
- **5.** Si $f:X\to Y$ est une fibration, et L un fibré en droites sur X, alors on a l'inégalité dite ("additivité facile"): $\kappa(X,L)\le p+\kappa(X_y,L_{|X_y})$, avec p=dim(Y).
- **1.5.** Remarques: L'assertion 4. précédente est un substitut (très faible) du cas $L = \Phi^*(M)$, avec M ample sur V_L , comme dans l'exemple (1.1.4). En effet: l'application Φ_L de l'assertion 1.4.4 cidessus est très classique: elle n'est autre que l'application $\Phi_{mL}: X \to \mathbb{P}(H^0(X, mL)^*) := \mathbb{P}^N$ associée au système linéaire |mL|, pour m grand et divisible. Cette application associe à $x \in X$ générique l'hyperplan constitué des sections qui s'annulent en x. Si L est ample, cette application est un plongement de X dans \mathbb{P}^N , et les sections de mL s'annulent sur les intersections de $\Phi_{mL}(X)$ avec les hyperplans de \mathbb{P}^N .
- Si $L = f^*(M)$, comme dans l'exemple (1.1.4) ci-dessus, alors Φ_M est un plongement de Y, et clairement, $\Phi_L = f \circ \Phi_M$, puisque $H^0(X, mL) = f^*(H^0(Y, mM))$. Donc $\Phi_L(X) = Y$ est bien de dimension p, et $\Phi_L = f$.

B. La Dimension Canonique.

1.6. Définition: Soit X variété analytique complexe compacte connexe (lisse). On pose:

 $\kappa(X) := \kappa(X, K_X) \in \{-\infty, 0, 1, ..., n\}.$

Si $\kappa(X) = n = \dim(X)$, on dit que X est de type général.

On appelle $\kappa(X)$ la dimension canonique (ou: "de Kodaira") de X.

(Le terme de "dimension canonique est dû à Moishezon ([Mo], où il l'a introduite). Cette notion apparait en fait pour la première fois dans [Sh], semble-t-il, mais dans le cas particulier des surfaces. Le terme, usuel, de "dimension de Kodaira" est surprenant, puisque Kodaira n'a jamais utilisé cette notion (sauf une fois, en 1975, alors qu'elle était déjà devenue d'usage courant), et ceci même dans sa classification des surfaces, qu'il base systématiquement sur l'étude des invariants numériques de leurs modèles minimaux).

La dimension canonique est l'invariant fondamental de la classification. Le théorème de prolongement d'Hartogs montre que c'est un invariant biméromorphe de X. (Attention! Ce ne serait pas le cas si l'on avait considéré $-K_X$). On peut donc, par invariance biméromorphe, définir $\kappa(X)$ pour un espace analytique compact irréductible X quelconque (en en considérant un modèle lisse).

Si $f: X \to Y$ est méromorphe surjective, avec X, Y de même dimension, on a: $\kappa(X) \ge \kappa(Y)$. En particulier: X est de type général si Y l'est.

1.7. Exemples:

1. Les courbes. On a 3 cas:

```
\kappa(X) = -\infty \operatorname{ssi} X \cong \mathbb{P}^1 \operatorname{ssi} g(X) = 0 \operatorname{ssi} K_X < 0.
```

$$\kappa(X) = 0$$
 ssi $X \cong \mathbb{C}/\Lambda$ ssi $g(X) = 1$ ssi $K_X = 0$.

$$\kappa(X) = -\infty \text{ ssi } X \cong \mathbb{D}/\Gamma \text{ ssi } g(X) \ge 2 \text{ ssi } K_X > 0.$$

On voit donc que pour les courbes, κ équivaut à la "géométrie" de X.

2. Produits. Si $X = T \times S$ est le produit de 2 variétés T et S, alors on montre facilement que, de manière naturelle: $H^0(X, mK_X) = H^0(T, mK_T) \otimes H^0(S, mK_S), \forall m$, et donc que: $\kappa(X) = \kappa(T) + \kappa(S)$.

Par exemple: Soit T une variété complexe compacte et connexe. Alors: $\kappa(T \times \mathbb{P}^1) = -\infty$.

- Si $\kappa(S) = 0$ (par exemple: si S est une courbe elliptique), alors: $\kappa(T \times S) = \kappa(T)$. (On obtient ainsi des exemples simples de variétés X de dimension n, et de dimension canonique $\kappa \in \{-\infty, 0, 1, ..., n\}$ arbitraire).
- 3. Fibrations. Soit $f: X \to Y$, une fibration. Alors on a: $\kappa(Y) + \kappa(X_y) \le \kappa(X) \le \dim(Y) + \kappa(X_y)$. L'inégalité de droite est l'additivité facile de 1.4.4, mais celle de gauche est la conjecture $C_{n,m}$ d'Iitaka (l'hypothèse X Kähler est essentielle). Cette conjecture est démontrée (Kawamata, Viehweg) lorsque Y est de type général (ie: $\kappa(Y) = \dim(Y) > 0$), auquel cas on a donc égalité: $\kappa(X) = \dim(Y) + \kappa(X_y)$.
- Si $\kappa(X) \geq 0$, on définit par application de **1.4.4** à K_X une (unique) fibration $J_X: X \to J(X)$, appelée **fibration d'Iitaka-Moishezon**, telle que: $dim(J(X)) = \kappa(X)$, et $\kappa(X_j) = 0$, si X_j est sa fibre générale. Cette application détermine donc la "composante $\kappa = 0$ " de X si $\kappa(X) \geq 0$. Observer cependant qu'il n'y a pas de relation simple entre K_X et $J_X^*(K_{J(X)})$ en général. En particulier, J(X) n'est pas toujours de type général, et J_X ne fournit alors pas de "composante" de type général de X.

(Remarquons que la fibration d'Iitaka-Moishezon, introduite dans [Ii] et [Mo], est appelée simplement "fibration d'Iitaka", d'habitude. A nouveau, [Mo] semble être passé inaperçu).

- 4. Surfaces. On a ici 4 classes de surfaces:
- $\kappa(X) = -\infty$ ssi X est biméromorphe à un produit $\mathbb{P}^1 \times C$, où C est une courbe.
- $\kappa(X) = 0$ ssi un revêtement étale fini de X est biméromorphe à un tore complexe (de dimension 2), ou à une surface K3 (déformation d'une quartique lisse de \mathbb{P}^3).
- $\kappa(X) = 1$ ssi X est biméromorphe à une fibration "elliptique" $J_X = f : X \to C = J(X)$ sur une courbe C telle que $mK_X = f^*(L)$, avec L ample sur C, pour un m > 0. (Dire que f est elliptique signife que ses fibres lisses sont des courbes elliptiques).
- $\kappa(X) = 2$, alors X est de "type général" (il n'y a pas de principe de classification connu; c'est dans cette classe que se trouve l'immense majorité des variétés de cette dimension (d'où le terme, dû à Moishezon)).
- 5. Variétés de type général. Si $f: X \to Y$ est une fibration holomorphe et si X est de type général, alors X_y est aussi de type général, par additivité facile 1.4.5 et $K_{X_y} = K_{X|X_y}$. Par restriction à un sous-espace adéquat de Z, on en déduit que le membre général d'une famille de sous-variétés $(V_z)_{z \in Z}$ est aussi de type général si ces sous-variétés recouvrent X.

C. Variétés uniréglées.

1.8. Définition: On dit que X (Kähler compacte connexe) est **uniréglée** s'il existe une application méromorphe surjective $f: T \times \mathbb{P}^1 \to X$ (dans laquelle T dépend de X, et la restriction de f à $t \times \mathbb{P}^1$ est non-constante, pour $t \in T$ générique).

On montre, à l'aide de la théorie de la variété de Chow (qui décrit en particulier les déformations de f par des espaces de paramètres analytiques), que cette condition signifie aussi que X est recouverte par des **courbes rationnelles** (ie: des images d'applications holomorphes non-constantes $r: \mathbb{P}^1 \to X$), et que l'on peut choisir $f: T \times \mathbb{P}^1 \to X$ génériquement finie.

On en déduit la:

1.9. Proposition: Si X est uniréglée, alors: $\kappa(X) = -\infty$.

L'une des conjectures fondamentales de la classification est la réciproque, établie en dimension 3 si X est projective ([Mi], [M]), mais seulement en dimension 2 pour X Kähler:

1.10. Conjecture " $-\infty$ ": Si $\kappa(X) = -\infty$, alors X est uniréglée.

Cette conjecture nécessite l'hypothèse X Kähler (comme le montrent les surfaces de Hopf).

2. LES TROIS GÉOMÉTRIES "PURES".

A. Les trois géométries pures.

Elles sont définies en dimension n par les trois classes suivantes de variétés X (qui généralisent respectivement les courbes hyperboliques, plates et sphériques):

- **2.1. Variétés de type général:** Ce sont les X telles que $\kappa(X) = n$. Les exemples les plus simples sont les quotients de domaines bornés symétriques, et les hypersurfaces lisses de degré au moins n+3 de \mathbb{P}^{n+1} .
- **2.2.** Variétés avec $\kappa(X) = 0$. Les exemples les plus simples sont les tores complexes (\mathbb{C}^n/Λ) , Λ réseau de \mathbb{C}^n , les variétés hyperkählériennes, et les variétés de Calabi-Yau. Les hypersurfaces lisses de degré n+2 dans \mathbb{P}^{n+1} appartiennent à cette classe. Pour n=1, on obtient les courbes elliptiques, pour n=2, des variétés hyperkählériennes: les surfaces K3, et pour $n\geq 3$, des variétés de Calabi-Yau, dont les quintiques de \mathbb{P}^4 fournissent les premiers exemples).
- **2.3.** Les variétés κ -Rationnellement Connexes. (Ou " κ -RC", en abrégé). Ce sont les X telles que , pour toute fibration (méromorphe) $f: X \to Y$, on ait: $\kappa(Y) = -\infty$. (ie: X ne "domine" que des variétés Y telles que $\kappa(Y) = -\infty$).

Si l'on prend $f := id_X : X \to X$, on a donc: $\kappa(X) = -\infty$ si X est κ -RC. La conjecture $-\infty$ affirme donc que X est uniréglée si X est κ -RC.

Mais la condition "uniréglée" est beaucoup plus faible que κ -RC, car si $f: X \to Y$ est une fibration, alors Y est κ -RC si X l'est. Tandis que $X = \mathbb{P}^1 \times T$ est uniréglée, pour T arbitraire, mais κ -RC ssi T l'est. Si C est une courbe elliptique, par exemple, $X = \mathbb{P}^1 \times C$ est uniréglée, mais pas κ -RC.

La propriété κ -RC peut némmoins être décrite géométriquement, si l'on admet la conjecture $-\infty$.

2.4. Définition: La variété X est rationnellement connexe (RC en abrégé) si deux points génériques de X peuvent être joints par une courbe rationnelle de X.

- **2.5.** Remarques. Si X est lisse, il suffit pour être RC, que 2 points génériques de X soient contenus dans une réunion finie **connexe** de courbes rationnelles de X. La lissité est essentielle (prendre un cône sur une courbe elliptique pour le voir). De plus, si X est RC, tout ensemble fini de X (et non seulement les ensembles à 2 éléments) est contenu dans une courbe rationnelle de X. Ces résultats difficiles sont démontrés dans [Ko-Mi-Mo]. Voir [De97] pour un exposé très clair.
- **2.6.** Exemples: \mathbb{P}^n , les Grassmanniennes, et plus généralement, les variétés rationnelles ou unirationnelles sont RC. Les variétés de Fano $(-K_X \text{ ample})$ le sont aussi, et donc aussi les hypersurfaces lisses de degré au plus n+1 de \mathbb{P}^{n+1} , par la formule d'adjonction.

Une variété X qui est RC est uniréglée, et a donc $\kappa(X) = -\infty$. Par ailleurs, si $f: X \to Y$ est surjective, il est immédiat que Y est également RC, donc $\kappa(Y) = -\infty$. Donc X est κ -RC si X est RC. Réciproquement, on montre facilement (à l'aide du quotient rationnel décrit ci-dessous et de [G-H-S] en particulier) la:

2.7. Proposition: Si la conjecture $-\infty$ est vraie, alors X est RC ssi X est κ -RC. (Voir **2.12** ci-dessous pour les ingrédients de la démonstration).

B. Le quotient rationnel.

On a défini en **1.7.3** la fibration d'Iitaka-Moishezon de X si $\kappa(X)=0$. Cette fibration détermine dans un sens satisfaisant la "composante $\kappa(X)=0$ " dans ce cas.

On peut aussi construire la "composante" RC de X (qui est donc aussi sa composante pure κ -RC si la conjecture $-\infty$ est vraie).

- **2.8. Théorème:** Il existe une (unique) fibration $r_X: X \to R(X)$ telle que:
- 1. Les fibres de r_X sont RC.
- **2.** R(X) n'est pas uniréglé.

On appelle r_X le quotient rationnel de X.

2.9. Remarques:

- **1.** La conjecture $-\infty$ affirme que $\kappa(R(X)) \ge 0$, et donc que l'on peut définir la composée $J_{R(X)} \circ r_X : X \to J(R(X))$ dans tous les cas.
- 2. On peut définir de manière analogue un quotient κ -RC, en remplaçant RC par κ -RC dans la condition 3.7.1. Ces deux quotients coincident, si 1.10 est vraie.
 - **3.** Observer que dim(R(X)) < dim(X) ssi X est uniréglée.
- **2.10.** indication sur la démonstration de **2.8**: On construit ([C81], [Ko-Mi-Mo]) r_X comme le quotient de X pour la relation d'équivalence sur X, lisse, qui identifie deux points lorsqu'ils sont contenus dans une réunion connexe de courbes rationnelles. Les fibres génériques de r_X sont alors lisses, donc RC par **2.5**. On conclut enfin que R(X) n'est pas uniréglé à l'aide du:
 - **2.11.** Théorème ([G-H-S]): Soit $f: X \to Y$ une fibration telle que X_y soit RC. Alors:
 - 1. Si Y est une courbe, f admet une section. En particulier, X est RC si $Y = \mathbb{P}^1$.
 - 2. Si Y est RC, X aussi.

(La démonstration de 2.11 (voir [De02] pour un exposé accessible) est donnée dans le cas où X est projective, mais s'applique au cas Kähler par certains résultats de [C81]).

2.12. indication sur la démonstration de **2.7**: Si R(X) n'est pas un point, alors $\kappa(R(X)) \ge 0$, par la conjecture $-\infty$. Contradiction si X est κ -RC. Donc R(X) est un point, et X est RC.

C. Pourquoi les structures orbifoldes.

2.13. Une idée naturelle pour construire les "composantes" $\kappa=0$ et κ -RC de X consiste à itérer l'application $(J_{R(X)} \circ r_X)$ précédente; c'est-à-dire à l'appliquer à X, puis à $J(R(X)) = (J \circ r)$, $J(R(J(R(X)))) = (J \circ r)^2$, etc... Cette suite de fibrations stationne quand la base B, obtenue après k itérations $c:=(J \circ r)^k, k \leq n$, satisfait: B=R(B)=J(R(B)), ce qui ne se produit clairement que si B est une variété de type général, ou un point. On obtiendrait ainsi, par élimination des "composantes" successives des types $\kappa=0$ et κ -RC de X, une base qui serait la "composante" de type général de X (éventuellement triviale, c'est-à-dire réduite à un point).

Remarquons que l'on peut envisager de construire directement "par en bas", la fibration $c := (J \circ r)^n$ composée de toutes les fibrations précédentes en construisant une fibration $f : X \to Y$ de base Y de type général, et maximale pour cette propriété. On peut facilement construire une telle f, mais la construction n'est pas stable par revêtement étale fini. Et ne peut en fait pas être corrigée en prenant en considération ces revêtements. ([C01],[B-T]).

Nous allons voir sur un exemple simple (2.14 ci-dessous) que des "composantes" de type général peuvent exister dans X, qui ne sont pas "révélées" par une telle itération, à cause de la présence de fibres multiples. Cet exemple montre aussi que la dimension des fibres de la fibration c n'est pas invariante par revêtement étale fini.

2.14. Un exemple justificatif. Soient E (resp. H) une courbe elliptique (resp. hyperelliptique de genre $g \geq 2$), et t (resp. ϑ) une translation d'ordre 2 sur E (resp. l'automorphisme hyperelliptique de H). Soit $X' := E \times H$, et $a := (t \times \vartheta : X' \to X'$ l'involution (sans point fixe) obtenue par action diagonale.

On note X := X'/< a > le quotient de X' par a, et par $u: X' \to X$ et $v: H \to H/< \vartheta > \cong \mathbb{P}^1$ les applications quotient naturelles.

Alors $J_X: X \to H/<\vartheta> = J(X)$ est la projection naturelle. Elle a pour base \mathbb{P}^1 , et fibre générique E. Néammoins, X a certainement une "composante" de type général non triviale (révélée par la pseudométrique de Kobayashi, ou le groupe fondamental, si l'on veut qu'une telle notion soit invariante par revêtement étale). Pour cette raison, la base \mathbb{P}^1 de la fibration J_X doit être considérée comme étant de type général, si l'on veut avoir une construction compatible avec les revêtements étales.

$$X' = E \times H \xrightarrow{u} X$$

$$\downarrow_{J_{X'}} \qquad \qquad \downarrow_{J_{X}}$$

$$H \xrightarrow{v} \mathbb{P}^{1}$$

Une donnée géométrique a néammoins gardé la trace de la construction précédente: les fibres multiples de J_X . Celles-ci sont de multiplicité 2, situées au-dessus des images $b_j, j=1,...,2g+2$, par v des points hyperelliptiques de H. On va donc définir le fibré canonique de la base B de J_X par: $K_B := K_{\mathbb{P}^1} + \sum_{j=1,...,2g+2} (1-1/2).b_j$, de telle sorte que son image réciproque par v soit K_H .

2.15. La version orbifolde Nous allons maintenant généraliser cette construction, en introduisant (§4) une structure orbifolde sur la base d'une fibration $f: X \to Y$ arbitraire, et montrer que les structures orbifoldes ainsi obtenues permettent de résoudre naturellement le problème de décomposition posé initialement, en considérant les versions orbifoldes des fibrations r, J, c évoquées en **2.9** ci-dessus.

L'idée sous-jacente est que, tout comme dans l'exemple (2.14) ci-dessus, il existe un revêtement ramifié fini Y' de Y tel que par ce changement de base les fibres de f perdent leurs multiplicités, et que l'espace X' déduit de X soit non-ramifié sur X. Un tel changement de base n'existe pas, en général, et la structure orbifolde que l'on introduit sur Y est un substitut virtuel pour un tel Y'. On va justement

vérifier que les orbifoldes ainsi introduites se comportent exactement comme dans le cas "classique" ou un tel revêtement existerait.

Cette notion de base orbifolde nous permettra de définir (§6.A) les variétés spéciales comme étant celles n'ayant pas de fibration non-constante ayant une base orbifolde de type général. Cette classe contient les variétés de type RC ou $\kappa = 0$.

On construira directement (par "en bas"), (§7.A) sur toute X une unique fibration (le "coeur") à fibres spéciales et base orbifolde de type général (ou un point ssi X est spéciale).

L'itération de la suite de fibrations $(J \circ r)$, prise au sens orbifolde, nous conduira en **7.B** à la décomposition canonique du "coeur".

3. ORBIFOLDES.

3.1. Soit Y une variété complexe compacte et connexe. Une structure **d'orbifolde** sur Y est la donnée d'un \mathbb{Q} -diviseur $\Delta := \sum_{j \in J} a_j.D_j$, avec $0 < a_j \le 1$, $a_j \in \mathbb{Q}, \forall j$, et D_j des diviseurs irréductibles distincts de Y. (On dira que Δ est à multiplicités "standard" si $a_j = (1 - 1/m_j), m_j \in \mathbb{Z}, \forall j \in J$).

On notera (Y/Δ) l'orbifolde ainsi définie.

Son fibré canonique est le \mathbb{Q} -diviseur $K_Y + \Delta$ sur Y.

Sa dimension de Kodaira est: $\kappa(Y/\Delta) := \kappa(Y, K_Y + \Delta) := \kappa(Y, m_0.(K_Y + \Delta))$, où l'on a choisi $m_0 \in \mathbb{Z}^+$ tel que $m_0.a_i \in \mathbb{Z}, \forall j$.

On a, bien sûr, toujours: $\kappa(Y/\Delta) \ge \kappa(Y)$, et $\kappa(Y/\Delta) \in \{-\infty, 0, 1, ..., n\}$.

- **3.2. Exemple:** Si $Y = \mathbb{P}^p$, si d_j est le degré de D_j , et si $\delta := deg(K_{(\mathbb{P}^p/\Delta)}) := -(p+1) + \sum_{j \in J} a_j.d_j$, alors: $\kappa(\mathbb{P}^p/\Delta) = -\infty$ (resp. 0; resp. p) ssi: $\delta < 0$ (resp. $\delta = 0$; resp. $\delta > 0$).
- **3.3. Fibration d'Iitaka-Moishezon.** Elle peut être définie par application de **1.4.4.** à son fibré canonique, avec les mêmes propriétés que si $\Delta = \emptyset$, pour toute orbifolde (Y/Δ) si $\kappa(Y/\Delta) \ge 0$.

4. LA BASE ORBIFOLDE D'UNE FIBRATION.

A. Généralités.

4.0. Multiplicités. Soit $f: X \to Y$ une fibration holomorphe, avec X, Y lisses.

Un diviseur effectif E de X est dit f-exceptionnel si $codim_Y(f(E)) \geq 2$.

Soit $D \subset Y$ un diviseur irréductible, et $f^*(D) = \sum_{j \in J} (m_j D_j) + E$, où E est f-exceptionnel, et où les D_j sont les composantes irréductibles non f-exceptionnelles de $f^{-1}(D)$. Donc: $f(D_j) = D, \forall j$.

On définit alors: $m(f, D) := \inf_{j \in J} \{m_j\}$. C'est la multiplicité de la fibre de f au-dessus du point générique de D.

Remarquons que l'on a donc: m(f, D) = 1, sauf pour un nombre fini de diviseurs D, contenus dans le lieu de Y au-dessus duquel f n'est pas submersive.

- **4.1. Remarque:** La multiplicité classique est définie différemment, par: $m^+(f, D) := pgcd_{i \in J}\{m_i\}$.
- **4.2. Définition:** La base orbifolde de f est: $(Y/\Delta(f))$, où : $\Delta(f) := \sum_{D \subset Y} (1 1/m(f, D)) \cdot D$. (Cette somme est finie, puisque le coefficient de D s'annule ssi m(f, D) = 1).

4.3. Exemples:

- 1. Si X_y est RC et si Y est projective, on déduit de **2.11** que $\Delta(f) = \emptyset$.
- 2. Si X_y est une courbe elliptique, on peut avoir $\Delta(f) \neq \emptyset$ (voir l'exemple **2.14**).

On définit enfin: $\kappa(Y, f) := \kappa(Y/\Delta(f)) := \kappa(Y, K_Y + \Delta(f)).$

4.4. Remarque: Cette dimension n'est pas un invariant biméromorphe de f. C'est-à-dire que l'on n'a pas nécessairement $\kappa(Y,f)=\kappa(Y',f')$ si f et $f':X'\to Y'$ sont équivalentes (noté: $f\sim f'$), c'est-à-dire s'il existe un diagramme commutatif $u:X'\to X,\ v:Y'\to Y$ avec $f\circ u=v\circ f':X'\to Y,$ dans lequel u et v sont biméromorphes.

$$X' \xrightarrow{u} X$$

$$f' \downarrow \qquad \qquad \downarrow f$$

$$Y' \xrightarrow{v} Y$$

Dans une telle situation, on a alors:

1. $v_*(\Delta(f') = \Delta(f)$, et donc:

2. $\kappa(Y', f') \leq \kappa(Y, f)$.

Mais on peut avoir inégalité stricte (seulement si $\kappa(Y) = -\infty$). D'où:

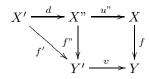
4.5. Définition: $\kappa(f) := \inf\{\kappa(f'); f' \sim f\}$. On dit que f est de type général si $\kappa(f) = \dim(Y) > 0$.

(Si Y est de type général, f est donc de type général). Mais il existe des fibrations de type général de base \mathbb{P}^p , par exemple celle définie en **2.14**).

On a un critère pour tester si $\kappa(Y, f) = \kappa(f)$.

4.6. Définition: $f': X' \to Y'$ est **nette** s'il existe $u: X' \to X$, avec X lisse, telle que tout diviseur $E' \subset X'$ qui est f'-exceptionnel est u-exceptionnel.

Une fibration f a toujours des représentants nets, obtenus par aplatissement de f par un changement de base biméromorphe $v:Y'\to Y$, et désingularisation $d:X'\to X$ de l'espace X" obtenu par ce changement de base.

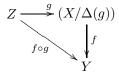


- **4.7. Proposition:** $\kappa(Y, f) = \kappa(f)$ si f est nette.
- **4.8. Remarque:** On démontre la proposition ci-dessus par une seconde définition directe de $\kappa(f) := \kappa(X, F_f)$, où $F_f \subset \Omega_X^p$ est le faisceau cohérent de rang 1 obtenu par saturation de $f^*(K_Y)$ dans Ω_X^p .

Les fibrations de type général sur X lisse sont alors naturellement en bijection avec les sous-faisceaux **de Bogomolov** de X, qui sont les sous-faisceaux saturés cohérents F de rang 1 de Ω_X^p , pour un p > 0, tels que $\kappa(F) = p$, c'est-à-dire maximale, par l'inégalité classique de Bogomolov.

4.9. Remarque: Si $f: X \to Y$ est une fibration, et $E := \sum_{h \in H} (1 - 1/n_h) \cdot E_h$ un diviseur orbifolde "standard" sur X, alors la restriction E_y de E à X_y est un diviseur orbifolde standard sur X_y . On définit de manière analogue au cas ci-dessus, où $E = \emptyset$, la base orbifolde $\Delta(f, E) := \sum_{D \subset Y} (1 - 1/m(f, E; D)) \cdot D$ de (f, E), et la dimension de Kodaira $\kappa(f, E)$, de telle sorte que si $g: Z \to X$ et f sont nettes, alors: $\Delta(f \circ g) = \Delta(f, \Delta(g))$.

(Plus précisément: $m(f, E; D) = inf_{j \in J}\{m_j, n_j\}$, où: $n_j = n_h$ si $Dj = E_h$, $h \in H$, et $n_j = 1$ sinon).



5. ADDITIVITÉ ORBIFOLDE.

On étend au cadre orbifolde la conjecture $C_{n,m}$ d'Iitaka.

5.1. Conjecture $C_{n,m}^{orb}$: Soit $f:(X/E)\to Y$ une fibration à croisements normaux (dans un sens adéquat naturel), E étant un diviseur orbifolde sur X. Alors: $\kappa(X/E) \ge \kappa(X_y/E_y) + \kappa(Y/(\Delta(f,E)))$.

L'un des outils essentiels des présentes considérations est le:

5.2. Théorème: Soit $f:(X/E) \to Y$ comme ci-dessus. Si (f,E) est de type général (ie: si $\kappa(Y/\Delta(f,E)) = dim(Y)$), alors: $\kappa(X/E) = dim(Y) + \kappa(X_y/E_y)$.

La démonstration est une adaptation au cas orbifolde de celle, classique, de Viehweg. Bien que les techniques de démonstrations soient les mêmes, le cadre orbifolde en étend considérablement le domaine d'application quand $\kappa(X_y) = -\infty$.

Dans le cas particulier où $E = \emptyset$, on obtient:

5.3. Corollaire 1. Soit $f: X \to Y$ une fibration de type général (ie: $\kappa(f) = dim(Y) > 0$). Alors: $\kappa(X) = \kappa(X_y) + dim(Y)$.

Si $\kappa(X) = 0$, on a donc:

5.4. Corollaire 2. Si $\kappa(X) = 0$, il n'existe pas de fibration de type général $f: X \to Y$. (On dira que X est "spéciale").

5.5. Corollaire 3. Soit $f: X \to Y$ et $g: Z \to X$ des fibrations. On suppose que:

- **1.** $(f \circ g)$ est de type général.
- **2.** La restriction $g_y: Z_y \to X_y$ est de type général (pour $y \in Y$ général).

Alors: $g: Z \to X$ est de type général.

Ce résultat joue un rôle crucial dans la suite.

idée de la démonstration de 5.3: On suppose que dim(Y) = 1 et que $m^+(f, D) = m(f, D), \forall D \subset Y$. On a alors un diagramme commutatif dans lequel u est étale fini, et v fini, avec: $v^*(K_Y + \Delta(f)) = K_{Y'}$.



On se ramène au cas classique en observant que:

. $v^*(m(K_Y + \Delta(f))) = m.K_{Y'}$, et donc (par platitude de f), que:

. $v^*(f_*(m.K_{(X/(Y/\Delta(f)))})) = (f')_*(m.K_{X'/Y'})$, la notation $K_{X/Y}$ désignant comme d'habitude le fibré canonique relatif (y compris si Y est une orbifolde).

Le cas général se traite de la même façon, avec des détails techniques additionnels.

6. VARIÉTÉS SPÉCIALES.

A. Généralités.

6.1. Définition: On dit que X est **spéciale** s'il n'existe pas de fibration (méromorphe) $f: X \to Y$ de type général.

6.2. Exemples:

- **0.** Variétés de type général: Si X est de type général, alors X n'est pas spéciale (car $id_X : X \to X$ est alors une fibration de type général).
- 1. Courbes: La courbe X est spéciale ssi elliptique ou \mathbb{P}^1 , car une fibration définie sur X est soit constante, soit id_X , l'identité de X.
- **2.** Revêtements: Si $g: X \to X'$ est une application méromorphe surjective, et si X est spéciale, alors X' aussi.

Si g est un revêtement étale fini, et si X' est spéciale, alors X est aussi spéciale.

La preuve de cette dernière assertion d'apparence triviale est difficile, et utilise le Corollaire 5.5 précédent.

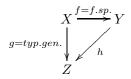
- 3. Surfaces: Une surface X est spéciale ssi elle est dans l'une des 3 classes suivantes:
- . $\kappa(X) = -\infty$: X est biméromorphe à $\mathbb{P}^1 \times C$, avec C une courbe elliptique ou \mathbb{P}^1 .
- . $\kappa(X)=0$: X a un revêtement étale fini biméromorphe à \mathbb{C}^2/Λ (tore complexe), ou à une surface K3.
- . $\kappa(X) = 1$: X a un revêtement étale fini X' qui est une fibration elliptique $f': X' \to C$, de base une courbe C elliptique ou \mathbb{P}^1 , f' ayant au plus 2 fibres multiples si $C \cong \mathbb{P}^1$, et aucune si C est elliptique.

Plus généralement, il existe pour tout n > 0 et tout $\kappa \in \{-\infty, 0, 1, ..., (n-1)\}$, des variétés spéciales X de dimension n et telles que $\kappa(X) = \kappa$.

- **4.** Fibrations à fibres et base spéciales: Soit $f: X \to Y$ une fibration telle que X_y (la fibre générale) et Y sont spéciales. Alors: X n'est pas spéciale, en général (voir l'exemple justificatif 2.14). Cependant:
- **6.3.** Théorème: Si $f: X \to Y$ est une fibration telle que X_y (la fibre générale) et Y sont spéciales, et si, de plus, f n'a pas de fibre multiple en codimension 1 (par exemple: si f a une section), alors X est spéciale.

La démonstration de **6.3** repose sur le:

6.4. Théorème: Soit $f: X \to Y$ et $g: X \to Z$ des fibrations telles que: g est de type général, et X_y (la fibre générale de f) est spéciale. Alors: il existe une (unique) fibration $h: Y \to Z$ telle que $g = h \circ g$. (Les fibrations à fibres spéciales "dominent" les fibrations de type général).



idée de la démonstration: Si Z (et non seulement g) est de type général, la famille $(V_y := g(X_y))_{y \in Y}$ de sous-variétés de Z paramétrée par Y recouvre Z. Il s'agit de montrer que $dim(V_y) = 0$. Sinon, on déduit de (1.7.5) que V_y est de type général. Ceci contredit l'hypothèse que X_y est spéciale. Le cas général s'obtient par un argument analogue, après avoir montré que (la factorisation de Stein de) la restriction de g à V_y est une fibration de type général, pour $y \in Y$ générique.

B. Variétés RC, ou avec $\kappa = 0$.

Il s'agit des exemples fondamentaux de variétés spéciales, qui généralisent le cas des courbes:

6.5. Théorème: X est spéciale dans les 2 cas suivants:

- 1. X est rationnellement connexe.
- **2.** $\kappa(X) = 0$.

Le cas $\mathbf{2}$, est une simple reformulation du corollaire 5.4 ci-dessus. Le cas $\mathbf{1}$, peut être déduit du résultat suivant, appliqué aux courbes rationnelles de X (qui sont spéciales):

6.6. Théorème: Soit X une variété dans laquelle 2 points généraux peuvent être joints par une chaine connexe de sous-variétés spéciales. Alors: X est spéciale.

idée de la démonstration: Sinon, soit $f: X \to Y$ de type général. Les chaines de sous-variétés spéciales de X qui rencontrent X_y , fibre générale de f, sont contenues dans X_y , puisque la restriction de f à une sous-variété spéciale de X en position générale est encore de type général. Ceci contredit le fait que dim(Y) > 0, et que l'on peut joindre un point général de X_y à un point général de X par une telle chaine.

6.7. Remarques:

- 1. On ne sait pas si les variétés κ -RC sont spéciales. C'est vrai cependant pour leur variante orbifolde (les variétés avec $\kappa_+ = -\infty$, définies en **7.5** ci-dessous).
- 2. On verra en 7.7 ci-dessous, que, réciproquement, les variétés spéciales sont des tours de fibrations en orbifoldes avec: soit $\kappa_+ = -\infty$, soit $\kappa = 0$.

C. Kobayashi-Ochiai orbifolde.

Un nouvel exemple de variété spéciales est fourni par le:

- **6.8. Théorème:** Soit $\varphi : \mathbb{C}^n \to X$ une application méromorphe dominante (ie: de rang n = dim(X) en un point au moins de \mathbb{C}^n). Alors: X est spéciale.
- **6.9. Remarque:** On peut donner des versions plus générales de 6.8, avec la même conclusion, en y remplaçant \mathbb{C}^n par $W \times \mathbb{C}$, W quasi-projective arbitraire, pourvu que $\varphi(W \times \{0\}) = a \in X$. On obtient ainsi une version transcendante du fait que les variétés RC sont spéciales..

On déduit 6.8 de la version orbifolde suivante du théorème d'extension de Kobayashi-Ochiai [KO75]:

6.10. Théorème: Soit U un ouvert de Zariski d'une variété complexe connexe V, et $\varphi:U\to X$ une application méromorphe. Soit $f:X\to Y$ une fibration de type général. On suppose que $\psi:=f\circ\varphi:U\to Y$ est dominante. Alors ψ s'étend méromorphiquement à V.

Le cas traité par Kobayashi-Ochiai est celui où X = Y est une variété de type général (Dans **6.13**, Y peut être un espace projectif, comme dans l'exemple **2.14**).

idée de la démonstration:

$$U := (V - D) \xrightarrow{\varphi} X$$

$$\downarrow f$$

$$V$$

La démonstration de [KO75] (avec X=Y) repose sur le fait que $\varphi^*(mK_Y) \subset mK_U$. On peut l'adapter à notre situation orbifolde en montrant que $f^*(m(K_Y+\Delta(f)) \subset (\Omega_X^p)^{\otimes m}$, et donc que: $\psi^*(m(K_Y+\Delta(f)) \subset mK_U$.

7. LE "COEUR".

A. Le coeur.

- **7.1. Théorème:** Soit X (compacte Kähler connexe). Il existe une unique fibration $c_X : X \to C(X)$, définie à équivalence biméromorphe près, telle que:
 - 1. La fibre générale de c_X est spéciale.
 - **2.** c_X est une fibration de type général, ou constante (ssi X est spéciale, donc).

On appelle c_X le coeur de X, et dim(C(X)) := ess(X) sa dimension essentielle.

idée de la démonstration: Unicité de c_X résulte de 6.4.

Existence. On procède par récurrence sur n. Si X est spéciale, c_X est l'application constante. Sinon soit $f: X \to Y$ une fibration de type général avec dim(Y) = p > 0 maximum. On veut montrer que X_y est spéciale. Soit $f = h \circ g$ le "coeur relatif" de f, constitué des deux fibrations $g: X \to Z$ et $h: Z \to Y$ telles que la restriction $g_y:=g_{|X_y}: X_y \to Z_y$ soit le coeur de X_y . (L'existence de ce coeur relatif est obtenue par la récurrence sur la dimension).



Donc g_y est de type général ainsi que $h \circ g$. On déduit de **5.5** que g est aussi de type général. Donc dim(Z) = dim(Y), Z = Y, et g = f. Comme les fibres de g sont spéciales par construction, et que g = f, celles de f le sont aussi. Donc $f = c_X$, par unicité.

7.2. Exemples:

- 1. ess(X) = 0 ssi X est spéciale.
- **2.** ess(X) = n = dim(X) ssi $\kappa(X) = n$, ie: ssi X est de type général.
- **3.** Si X est une courbe, on a donc: ess(X) = 0 ssi g(X) = 0, 1, et ess(X) = 1 ssi $g(X) \ge 2$. On peut décrire: $c_X = (J_X \circ r_X)$ (voir **2.7**) et **6.4**.

- **4.** On a fonctorialité du coeur dans le sens suivant: si $f: X \to Y$ est une fibration, alors il existe une unique fibration $c_f: C(X) \to C(Y)$ telle que $c_f \circ c_X = c_Y \circ f$.
- 5. Si $f: X \to Y$ est une fibration dont la fibre générale X_y est spéciale, alors il existe $h: Y \to C(X)$ telle que $c_X = h \circ f$, par 6.4. En particulier, si f est soit $r_X: X \to R(X)$, le quotient rationnel de X, soit $J_X: X \to J(X)$, la fibration d'Iitaka-Moishezon de X (définie si $\kappa(X) \geq 0$), on a une telle factorisation h. On dispose donc de factorisations $h_r: R(X) \to C(X)$, et $h_J: J(X) \to C(X)$ de $c_X = h_r \circ r_X = h_J \circ J_X$.
 - **6.** Lorsque $f = r_X$, il résulte de [G-H-S] que $\Delta(r_X) = \emptyset$, et que C(X) = C(R(X)) (voir **4.3** et **2.11**).
- 8. On peut appliquer ce qui précède à $f := J_{R(X)} : R(X) \to J(R(X))$ si $\kappa(R(X)) \ge 0$ (la conjecture $-\infty$ affirme que c'est toujours le cas).

On obtient ainsi une factorisation $h_J: J(R(X)) \to C(X) = C(R(X))$ de $c_X := h_J \circ (J_{R(X)} \circ r_X)$.

$$X \xrightarrow{r_X} R(X) \xrightarrow{J_{R(X)}} J(R(X))$$

$$\downarrow^{c_{R(X)}} \qquad \downarrow^{h_J}$$

$$C(X) \xrightarrow{=} C(R(X))$$

Cette factorisation est en fait le premier terme de la décomposition $c_X = (J \circ r)^n$ du coeur en une tour de fibrations à fibres soit avec $\kappa = 0$ (au sens orbifolde), soit $\kappa_+ = -\infty$ (une version faible de la connexité rationnelle).

B. La décomposition du coeur.

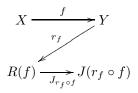
7.5 Définition: $\kappa_+(X) = \max\{\kappa(Y, f), f : X \to Y\}$, où f décrit l'ensemble des fibrations définies sur X.

La définition lorsque X est munie d'une structure d'orbifolde (X/E) est similaire, en remplaçant $\kappa(Y, f)$ par $\kappa(Y, f, E)$ définie en **4.9**).

- (7.6) Remarque: Si X est RC, $\kappa_+(X) = -\infty$, et cette condition implique que X est κ -RC. Donc, si la conjecture (1.10) est vraie, X est RC ssi $\kappa_+(X) = -\infty$.
- (7.7) **Proposition:** Soit $f:(X/E) \to Y$ une fibration dont la base orbifolde et la fibre orbifolde générale ont $\kappa_+ = -\infty$. Alors $\kappa_+(X/E) = -\infty$ aussi.
- (7.8) Théorème: Soit (X/E) une orbifolde. Il existe une unique fibration $r = r_{(X/E)} : (X/E) \to Y$ telle que:
 - 1. $\kappa(Y/\Delta(r, E)) \ge 0$.
 - 2. $\kappa_+(X_y/E_y) = -\infty$.
 - 3. De plus: $p = dim(Y) < dim(X) = n \operatorname{ssi} \kappa(X) = -\infty$.

On appellera $r_{(X/E)}$ la " $-\infty$ -réduction" de (X/E).

- **7.9.** Soit maintenant $f: X \to Y$ une fibration. On définit des fibrations r et J comme suit:
- a. $r_f = r_{(Y/\Delta(f))}: Y \to R(f)$ dans tous les cas.
- b. $J_f := J_{(Y/\Delta(f))} : Y \to J(f) \text{ si } \kappa(Y/\Delta(f)) \ge 0 \text{ (voir (3.3))}.$



La composée $s_f := J_{(r_f \circ f)} \circ r_f : Y \to S_f := J(r_f \circ f)$ est donc bien définie dans tous les cas, par la condition **7.8.1**. Les fibrations r_f, J_f coincident avec r_X, J_X quand $f = id_X$.

De plus, $s_f = id_Y$ ssi: ou bien Y est un point, ou bien $(Y/\Delta(f))$ est de type général.

7.10. Théorème: Si $f: X \to Y$ est à fibre générale spéciale, alors $s_f \circ f: X \to S_f$ aussi.

C'est une application facile d'une version orbifolde de (6.3).

On en déduit, par application itérée des fibrations s_f , commençant avec $f_0 = id_X$ (qui est à fibres spéciales!), une suite de fibrations $s^k := (J \circ r)^k : X \to S_k(X), k \ge 0$, à fibres spéciales. Cette suite stationne à $s^k : X \to S_k(X), k \le n$, ssi: ou bien $S_k(X)$ est un point, ou bien s^k une fibration de type général.

On obtient donc:

7.11. Théorème (de "décomposition du coeur"): Pour toute X, on a: $c_X = (J \circ r)^n$.

En particulier, si X est spéciale:

- **7.12. Corollaire:** X est spéciale ssi $(J \circ r)^n$ est la fibration constante définie sur X (ie: ssi X peut être décomposée comme une tour de fibrations à fibres orbifoldes ayant soit $\kappa_+ = -\infty$, soit $\kappa = 0$).
- **7.13.** Remarque: Les dimensions des $S_k(X), k \leq n$ définissent de nouveaux invariants biméromorphes de X, fonctoriels pour les applications méromorphes surjectives. Ces invariants sont aussi, conjecturalement, des invariants de déformation (voir **8.2**).

On a un exemple simple de décomposition du coeur dans le cas des surfaces.

- **7.14. Exemple:** Si X est une surface. Alors: $c_X = (J \circ r)^2$, où J et r sont des versions orbifoldes explicites du quotient rationnel et de la fibration d'Iitaka-Moishezon. Plus précisément:
 - . Si $\kappa(X) = -\infty$, alors X est biméromorphe à $\mathbb{P}^1 \times C$, avec $g := g(C) \geq 0$. Donc:

Si g = 0, $r_X = c_X$ est l'application constante.

Si $g=1, r_X: X \to C$ est la seconde projection. Et $J_C=J_{R(X)}=c_X$ est l'application constante.

Si $g \geq 2$, $r_X : X \to C$ est la seconde projection, et $J_C = id_C$. Donc $c_X = J_{R(X)} \circ r_X : X \to C$.

- . Si $\kappa(X) = 0$, $J_X = J \circ r_X = c_X$ est l'application constante de X.
- . Si $\kappa(X)=2$, on a: $c_X=r_X=J_X=id_X$, donc encore: $c_X=J_X\circ r_X$.
- . Si $\kappa(X)=1$, on a $r_X=id_X$, et $J:=J_X:X\to C$ est une fibration elliptique sur une courbe C. On fait intervenir la base orbifolde $B:=(C/\Delta(J))$ de J. On définit $r:=r_B$ et $J:=J_B$ en fonction de $\kappa(B)$ comme dans le cas non-orbifolde. (ie: r_B est l'application constante ssi $\kappa(B)=-\infty$, et J_B est l'application constante ssi $\kappa(B)=0$). On constate alors que $c_X=(J\circ r)^2$ dans tous les cas.

C'est le cas le plus simple dans lequel les versions orbifoldes de J et r interviennent. On trouvera la decomposition (nettement plus compliquée) de c_X en dimension 3 dans [C01].

8. CONJECTURES.

A. Déformations.

8.1. Conjecture: La classe des variétés spéciales est stable par déformation et spécialisation. (Ceci est vrai jusqu'en dimension 2).

Plus généralement:

- **8.2.** Conjecture. ess(X) et c_X sont invariants par déformation de X. Plus généralement: toutes les fibrations intermédiaires $(J \circ r)^k$ et $r \circ (J \circ r)^k$ se déforment avec X, pour $n \ge k \ge 0$.
- **8.3.** Remarques: L'invariance par déformation de κ (due dans des cas substantiels à Y.T.Siu) résout affirmativement le cas k = 0, lorsque $\kappa \ge 0$. Si la conjecture $-\infty$ est vraie, alors la conjecture **7.8** est vraie pour r (ie: le cas k = 0).

B. Le groupe fondamental.

8.4. Conjecture. Si X est spéciale, alors $\pi_1(X)$ est presque-abélien (ie: est abélien, si l'on remplace X par un revêtement étale fini adéquat).

Cette conjecture est vraie si X est RC (car $\pi_1(X) = 1$, dans ce cas), ou si $\pi_1(X)$ est linéaire (ie: plongeable dans un $Gl(n,\mathbb{C})$), ou si $c_1(X) = 0$, par Calabi-Yau. Un cas crucial ouvert est $\kappa(X) = 0$.

Le cas général se réduit d'ailleurs aux versions orbifoldes des cas $\kappa_+ = -\infty$ et $\kappa = 0$, à l'aide de 7.7 ci-dessous. On peut en effet (voir [C01]) naturellement définir les notions de groupe fondamental d'une orbifolde (à multiplicités "standard" (voir 3.1)), et d'orbifolde spéciale).

C. La pseudométrique de Kobayashi.

Si X est une variété complexe compacte (Kähler, ici), on note $d_X: X \times X \to \mathbb{R}$ sa pseudométrique de Kobayashi.

8.5. Conjecture: X est spéciale ssi $d_X \equiv 0$.

Cette conjecture est vraie si X est RC, et pour n=1 et n=2 (sauf, peut-être, si $\kappa(X)=2$, auquel cas elle est une version faible de la conjecture hyperbolique de Lang). Le cas crucial ouvert est, à nouveau: $\kappa=0$.

On peut démontrer cette conjecture dans le cas particulier où X admet une fibration $f: X \to Y$ dont les fibres lisses sont RC ou des variétés abéliennes, pourvu que deux points génériques de la base puissent être joints par l'image d'une courbe entière de Y (ie: une application holomorphe de $\mathbb C$ dans Y).

Une autre situation dans laquelle on peut établir que $d_X \equiv 0$ implique: X est spéciale, est celle du théorème **6.8**. En effet, d_X s'annule alors sur l'adhérence de l'image de $\varphi : \mathbb{C} \to X$, supposée non dégénérée. Si cette image est dense, on a donc $d_X \equiv 0$, et X est spéciale par **6.8**. La situation de la remarque **6.9** est similaire, plus générale.

On peut d'ailleurs poser de nombreuses questions dans ce contexte. Parmi celles-ci:

- 1. A-t'on $d_X \equiv 0$ si d_X s'annule sur $U \times U$, où U est un ouvert non vide de X (pour la topologie "cohérente", bien sûr)?
 - 2. Si $d_X \equiv 0$, existe-t'il une application holomorphe $\varphi : \mathbb{C} \to X$:
 - . d'image dense dans X?

. dont l'image contient un ensemble fini donné, arbitraire, de X? (Une réponse affirmative pour les couples d'éléments de X, avec variation algébrique des solutions avec les données, entrainerait, par **6.9**, que X est spéciale si $d_X \equiv 0$).

Pour les X arbitraires, le coeur permet de formuler la:

- **8.6. Conjecture:** Soit $c_X: X \to C(X)$ le coeur de X, compacte Kähler. Alors:
- 1. Il existe une unique pseudométrique δ_X sur C(X) telle que $d_X = (c_X)^*(\delta_X)$.
- 2. $\delta_X = d_{C(X/\Delta(c_X))}$, la pseudométrique de la base orbifolde de c_X .
- 3. δ_X est une métrique sur un ouvert de Zariski dense U de C(X).

L'assertion 1. n'est autre qu'une reformulation de la conjecture 8.5.

La condition 3. est donc, compte tenu de 2, la version orbifolde de la conjecture hyperbolique de Lang.

La pseudométrique de Kobayashi est définie sur une orbifolde (Y/Δ) , si $\Delta = \sum_{j \in J} (1 - 1/m_j).D_j$, exactement comme dans le cas $\Delta = \emptyset$, mais en ne considérant que les applications $h : \mathbb{D} \to Y$ du disque unité \mathbb{D} dans Y telles que $h^{(k)}(z)$ soit tangente à tous les ordres k > 0 non multiples de m_j à D_j en $h(z) \in D_j$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ tel que h(z) soit dans le lieu lisse du support de Δ .

D. Arithmétique.

Soit X une variété projective définie sur un corps de nombres K. Soit $K' \supset K$ un corps de nombres, et $X(K') \subset X$ l'ensemble des points K'-rationnels de X.

8.7. Conjecture: X est spéciale ssi il existe un corps de nombres $K' \supset K$ tel que l'ensemble X(K') soit Zariski dense dans X. (On dit alors que X est "potentiellement dense").

Cette conjecture n'est connue que dans des cas très particuliers (variétés unirationnelles, variétés abéliennes), mais n'est pas même démontrée pour les surfaces K3 les plus générales, ou les variétés RC (la version "corps de fonctions" est cependant connue pour les variétés RC, par [G-H-S]).

Remarquons que cette conjecture diffère de celle de Colliot-Thélène-Harris, qui affirme que X est potentiellement dense ssi aucun revêtement étale fini X' de X n'admet de fibration $f:X\to Y$ avec Y de type général et dim(Y)>0. [B-T] construit en effet des exemples de X simplement connexes n'admettant pas de telle fibration, et non spéciales. (Autrement dit: les fibres multiples du coeur ne peuvent être éliminées par un revêtement étale de X dans ce cas).

En analogie avec 8.6:

8.8. Conjecture. Soit X une variété projective complexe définie sur un corps de nombres K. Alors $c_X(X(K)) \cap U$ est fini, si U est l'ouvert de Zariski dense de X introduit en **8.6.3**.

Autrement dit: X(K) est concentré sur un nombre fini de fibres de c_X au-dessus de U.

Cette conjecture n'est connue que dans des cas très particuliers: courbes et sous-variétés de variétés abéliennes.

8.9 Remarque: On pourra trouver la version "corps de fonctions" des conjectures précédentes dans [C01].

Bibliographie:

- [B-T]F.Bogomolov-Y.Tschinkel. Special Elliptic Fibrations. Preprint (2003).
- [C81]F.Campana.Coréduction algébrique d'un espace analytique faiblement Kählérien compact.Inv. Math. (1981),187-223.
 - [C91] F.Campana. Twistor spaces of class C.J.Diff.Geom. 33 (1991),541-549.
 - [C92] F. Campana. Connexité rationnelle des variétés de Fano. Ann. Sc. ENS. 25 (1992), 539-45.
- [C01] F. Campana. Special Varieties and Classification Theory. Math. AG/0110051. (A paraitre aux Ann. Inst. Fourier (2004)).
 - [De97]O.Debarre. Variétés de Fano. Séminaire Bourbaki 1996/97, n827.
 - [De02]O.Debarre. Variétés Rationnellement connexes. Séminaire Bourbaki 2001/02, n905.
 - [G-H-S] T. Graber-M. Harris-J. Starr. Families of rationally connected varieties. Preprint 2001.
 - [I] S. Iitaka.Genera and Classification of Algebraic Varieties. Sugaku 24 (1972), 14-27.
 - [K] Y. Kawamata. Characterisation of Abelian varieties. Comp. Math. (1981), 253-76.
- [K-O] S. Kobayashi-T. Ochiai.Meromorphic mappings into compact complex spaces of general type. Inv. Math. 31 (1975), 7-16.
- [Ko-Mi-Mo]J. Kollár-Y. Miyaoka-S. Mori.Rationally connected Varieties.J. Alg. Geom. 1 (1992), 429-448.
 - [L]S.Lang. Hyperbolic and Diophantine Analysis. Bull. AMS 14(1986), 159-205.
 - [Mi]Y.Miyaoka.On the Kodaira Dimension of a Minimal Threefold. Math. Ann. 281 (1988),325-332.
- [M]S.Mori.Flip Theorem and the existence of Minimal odels for Threefolds. J.AMS. 1 (1988), 117-253.
- [Mo]B. Moishezon. Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces. Actes du Congrès International des Mathématiciens, Nice 1970. Vol. 2, 643-648.
 - [Sh]I.Shafarevitch. Algebraic Surfaces.Proceedings of the Stekhlov Institute. vol 75. 1965.
- [U] K. Ueno. Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Manifolds. LNM 439 (1975), Springer Verlag.
- [V] E. Viehweg. Vanishing theorems and and positivity of Algebraic fibre spaces. J. Proc. Int. Congr. Math. Berkeley (1986).